

УДК 517.988.6, 517.965

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-1969-1973

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УПОРЯДОЧЕННОГО НАКРЫВАНИЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПРИ АНТИТОННЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

© **Е. С. Жуковский**¹⁾, **Е. А. Плужникова**²⁾, **Е. М. Якубовская**²⁾

¹⁾ Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
Российский университет дружбы народов
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: zukovskys@mail.ru

²⁾ Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
E-mail: pluznikova_ elena@mail.ru

Продолжены исследования накрывающих отображений частично упорядоченных пространств, начатые в работах А.В. Arutyunov, Е.С. Zhukovskiy, S.E. Zhukovskiy (Topology and its Applications. 2015. V. 179. № 1. P. 13–33; 2016. V. 201. P. 330–343). Для многозначных отображений получены условия сохранения свойства упорядоченного накрывания при антитонных возмущениях.

Ключевые слова: частично упорядоченные пространства; многозначные упорядоченно накрывающие отображения; антитонные возмущения упорядоченно накрывающих отображений

Одним из интенсивно развивающихся направлений современного анализа является теория накрывающих отображений. Фундаментальные результаты о накрывающих отображениях в линейных нормированных и метрических пространствах получены в работах Е.Р. Авакова, А.В. Арутюнова, Б.Д. Гельмана, Л.М. Грейвса, А.В. Дмитрука, А.Д. Иоффе, А.А. Милотина, Б.С. Мордуховича, Н.П. Осмоловского, А. Удерзо и других авторов. В связи с темой настоящей работы отметим, что утверждения об устойчивости к липшицевым возмущениям свойства накрывания многозначных отображений метрических пространствах получены в работах [1]–[3]. В последние годы возник интерес к распространению понятия накрывания на другие классы пространств. Накрывающие отображения пространств с векторнозначными метриками рассмотрены в [4]–[6]. В работах [7]–[10] предложен аналог понятия накрывания для отображений частично упорядоченных пространств, доказаны теоремы о точках совпадения для однозначных и многозначных отображений, частными случаями которых являются классические принципы неподвижных точек. В [11] получено утверждение об антитонных возмущениях упорядоченно накрывающих однозначных отображений. Здесь предлагается аналогичный результат для многозначных отображений упорядоченных пространств.

Частично упорядоченное пространство, т. е. множество X с заданным на нем порядком \preceq обозначаем через $X = (X, \preceq)$. Для элементов $u, v \in X$ и множества $U \subset X$ будем обозначать

$$\mathcal{O}_X(u) \doteq \{x \in X : x \preceq u\}, \quad \mathcal{O}_X(U) \doteq \bigcup_{u \in U} \mathcal{O}_X(u), \quad [v, u]_X \doteq \{x \in X : v \preceq x \preceq u\},$$

$$\mathcal{O}_X^o(u) \doteq \{x \in X : x \prec u\}, \quad \overline{\mathcal{O}_X^o(u)} \doteq \{x \in X : x \succeq u\}.$$

Используем также обозначения $x \preceq u$ в случае, если $u \succeq x$, и $x \prec u$ или $u \succ x$, если $x \preceq u$, $x \neq u$.

Пусть заданы пространства (X, \preceq) , (Y, \preceq) . Мнозначное отображение $F: X \rightrightarrows Y$ называем *изотонным на множестве* $V \subset X$, если для любых $x, x' \in V$ таких, что $x' \preceq x$ и для любого $y \in F(x)$ существует $y' \in F(x')$, удовлетворяющий неравенству $y' \preceq y$. Отображение $F: X \rightrightarrows Y$ называем *антитонным на* $V \subset X$, если для любых $x, x' \in V$, $x' \preceq x$ и любого $y \in F(x)$ существует $y' \in F(x')$, удовлетворяющий неравенству $y' \succeq y$. Изотонное (антитонное) на всем X отображение называем *изотонным (антитонным)* (не упоминая множество X).

В [8], [10] введено следующее

О п р е д е л е н и е 1. Говорим, что отображение $F: X \rightrightarrows Y$ *упорядоченно накрывает* или *является упорядоченно накрывающим множеством* $W \subset Y$, если для любого $x \in X$ выполнено включение

$$\mathcal{O}_Y(F(x)) \cap W \subset F(\mathcal{O}_X(x)).$$

Отображение, упорядоченно накрывающее все пространство Y , называется *упорядоченно накрывающим*.

Из приведенного определения следует, что отображение $F: X \rightrightarrows Y$ упорядоченно накрывает множество W тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$\forall x \in X \quad \forall y \in F(x) \quad \forall y' \in W \quad y' \preceq y \quad \Rightarrow \quad \exists x' \in X \quad y' \in F(x') \quad \& \quad x' \preceq x.$$

Устойчивость свойства упорядоченного накрывания при антитонных возмущениях понимается следующим образом. Пусть задано отображение $\Upsilon: X^2 \rightrightarrows Y$, которое по первому аргументу является накрывающим некоторое множество. Устойчивость свойства накрывания означает, что если по второму аргументу отображение Υ антитонное, то отображение $F: X \rightrightarrows Y$, определенное соотношением

$$F(x) \doteq \Upsilon(x, x) \quad \forall x \in X, \tag{1}$$

накрывающее. Этот подход к проблеме устойчивости накрывания в метрических пространствах был предложен в [1], где рассматривалось однозначное отображение Υ двух аргументов, являющееся по первому из них (метрически) α -накрывающим, а по второму β -липшицевым, и утверждалось что отображение F будет $\alpha - \beta$ -накрывающим. Соответствующий результат для многозначных отображений получен в [12]. Такая трактовка устойчивости свойства накрывания является естественным обобщением подхода к трактовке этой проблемы в линейных пространствах: известная теорема Милютина [13] о липшицевых возмущениях накрывающего однозначного отображения, действующего в линейное метрическое пространство утверждает, что разность α -накрывающего и β -липшицева отображений является $\alpha - \beta$ -накрывающим отображением.

По отображению $\Upsilon: X^2 \rightrightarrows Y$ и элементу $y' \in Y$ определим множество $\mathcal{S}_X(\Upsilon, y')$ всех цепей $S \subset X$ таких, что

$$\begin{aligned} \forall x \in S \quad \exists y \in \Upsilon(x, x) \quad y \succeq y', \\ \forall x_1, x_2 \in S \quad x_1 \prec x_2 \quad \Rightarrow \quad \exists y \in \Upsilon(x_1, x_2) \quad y \preceq y'. \end{aligned}$$

Т е о р е м а 1. Пусть при любом $x \in X$ отображение $\Upsilon(\cdot, x): X \rightrightarrows Y$ упорядоченно накрывает множество $W \subset Y$; отображение $\Upsilon(x, \cdot): X \rightrightarrows Y$ является антитонным на множестве $\mathcal{O}_X^o(x)$; для любого $y' \in W$ любая цепь $S \in \mathcal{S}_X(\Upsilon, y')$ ограничена снизу и имеет такую нижнюю границу $\omega \in X$, что существует элемент $y \in \Upsilon(\omega, \omega)$, удовлетворяющий неравенству $y \succeq y'$. Тогда определенное соотношением (1) отображение $F: X \rightrightarrows Y$ упорядоченно накрывает множество $W \subset Y$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С. Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613–634.
2. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2012. V. 75. Iss. 3. P. 1026–1044.
3. Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е. О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1523–1537.
4. Жуковский Е.С. О возмущениях накрывающих отображений в пространствах с векторнозначной метрикой // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 2. С. 373–377.
5. Жуковский Е.С. О возмущениях векторно накрывающих отображений и системах уравнений в метрических пространствах // Сибирский математический журнал. 2016. Т. 57. № 2(236). С. 297–311.
6. Жуковский Е.С. О точках совпадения многозначных векторных отображений метрических пространств // Математические заметки. 2016. Т. 100. № 3. С. 344–362.
7. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2015. V. 179. № 1. P. 13–33.
8. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2016. V. 201. P. 330–343.
9. Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е. О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах // Доклады Академии наук. 2013. Т. 453. № 5. С. 475–478.
10. Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е. Точки совпадения многозначных отображений в частично упорядоченных пространствах // Доклады академии наук. 2013. Т. 453. № 6. С. 595–598.
11. Жуковский Е.С. Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 12. С. 1605–1621.
12. Aram Arutyunov, Valeriano Antunes de Oliveira, Fernando Lobo Pereira, Evgeniy Zhukovskiy and Sergey Zhukovskiy. On the solvability of implicit differential inclusions // Applicable Analysis. 2015. V. 94. № 1. P. 129–143.
13. Дмитриук А.В., Милютин А.А., Осмоловский Н.П. Теорема Люстерника и теория экстремума // УМН. 1980. Т. 35. № 6(216). С. 11–46.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 14-01-97504, 15-01-05134) и гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ № НШ-8215.2016.1.

Поступила в редакцию 24 октября 2016 г.

Жуковский Евгений Семенович, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, директор научно-исследовательского института математики, физики и информатики; Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: zukovskys@mail.ru

Плужникова Елена Александровна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа, e-mail: pluznikova_elena@mail.ru

Якубовская Екатерина Михайловна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант, кафедра функционального анализа, e-mail: yak.cat1306@gmail.com

ON STABILITY OF ORDERED COVERING OF MULTI-VALUED MAPPINGS UNDER ANTITONE DISTURBANCES

© E. S. Zhukovskiy¹⁾, E. A. Pluzhnikova²⁾, E. M. Yakubovskaya²⁾

¹⁾ Tambov State University named after G.R. Derzhavin
33 Internatsionalnaya St., Tambov, Russian Federation, 392000
The Peoples' Friendship University of Russia
6 Miklukho-Maklay St., Moscow, Russian Federation, 117198
E-mail: zukovskys@mail.ru

²⁾ Tambov State University named after G.R. Derzhavin
33 Internatsionalnaya St., Tambov, Russian Federation, 392000
E-mail: pluzhnikova_ elena@mail.ru

The study of covering mappings of partially ordered spaces, initiated in the works of A.V. Arutyunov, E.S. Zhukovskiy, S.E. Zhukovskiy (Topology and its Applications. 2015. V. 179. № 1. P. 13–33; 2016. V. 201. P. 330–343), is continued. For multi-valued mappings, the conditions of preserving the property of ordered covering under antitone disturbances are derived.

Key words: partially ordered spaces; multi-valued covering mappings; antitone disturbances of ordered covering mappings

REFERENCES

1. Avakov E.R., Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S. Nakryvayushchie otobrazheniya i ih prilozheniya k differentsial'nym uravneniyam, ne razreshennym otnositel'no proizvodnoj // *Differentsial'nye uravneniya*. 2009. T. 45. № 5. S. 613–634.
2. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*. 2012. V. 75. Iss. 3. P. 1026–1044.
3. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. O korrektnosti differentsial'nykh uravneniy, ne razreshennykh otnositel'no proizvodnoj // *Differentsial'nye uravneniya*. 2011. T. 47. № 11. S. 1523–1537.
4. Zhukovskiy E.S. O vozmushcheniyakh nakryvayushchih otobrazheniy v prostranstvakh s vektornoznachnoy metrikoy // *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences*, 2016. T. 21. Vyp. 2. S. 373–377.
5. Zhukovskiy E.S. O vozmushcheniyakh vektorno nakryvayushchih otobrazheniy i sistemah uravneniy v metricheskikh prostranstvakh // *Sibirskiy matematicheskij zhurnal*. 2016. T. 57. № 2(236). S. 297–311.
6. Zhukovskiy E.S. O tochkah sovpadeniya mnogoznachnykh vektornykh otobrazheniy metricheskikh prostranstv // *Matematicheskie zametki*. 2016. T. 100. № 3. S. 344–362.
7. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // *Topology and its Applications*. 2015. V. 179. № 1. P. 13–33.
8. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces // *Topology and its Applications*. 2016. V. 201. P. 330–343.
9. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. O tochkah sovpadeniya otobrazheniy v chastichno uporyadochennykh prostranstvakh // *Doklady Akademii nauk*. 2013. T. 453. № 5. S. 475–478.
10. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Tochki sovpadeniya mnogoznachnykh otobrazheniy v chastichno uporyadochennykh prostranstvakh // *Doklady akademii nauk*. 2013. T. 453. № 6. S. 595–598.
11. Zhukovskiy E.S. Ob uporyadochenno nakryvayushchih otobrazheniyakh i neyavnykh differentsial'nykh neravenstvakh // *Differentsial'nye uravneniya*. 2016. T. 52. № 12. S. 1605–1621.
12. Aram Arutyunov, Valeriano Antunes de Oliveira, Fernando Lobo Pereira, Evgeniy Zhukovskiy and Sergey Zhukovskiy. On the solvability of implicit differential inclusions // *Applicable Analysis*. 2015. V. 94. № 1. P. 129–143.
13. Dmitruk A.V., Milyutin A.A., Osmolovskiy N.P. Teorema Lyusternika i teoriya ekstremuma // *UMN*. 1980. T. 35. № 6(216). S. 11–46.

ACKNOWLEDGEMENTS: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (projects №№ 14-01-97504, 15-01-05134) and by the grant of the Russian Federation President for the state support of leading scientific schools № NSh-8215.2016.1.

Received 24 October 2016

Zhukovskiy Evgeny Semenovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Director of the Research Institute of Mathematics, Physics and Informatics; Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Department of Nonlinear Analysis and Optimization, e-mail: zukovskys@mail.ru

Pluzhnikova Elena Aleksandrovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department, e-mail: pluznikova_elen@mail.ru

Yakubovskaya Ekaterina Mikhailovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Post-graduate student of the Functional Analysis Department, e-mail: yak.cat1306@gmail.com

Информация для цитирования:

Жуковский Е.С., Плужникова Е.А., Якубовская Е.М. Об устойчивости упорядоченного накрывания многозначных отображений при антитонных возмущениях // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 6. С. 1969-1973. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-1969-1973

Zhukovskiy E.S., Pluzhnikova E.A., Yakubovskaya E.M. Ob ustojchivosti uporyadochennogo nakryvaniya mnogoznachnyh otobrazhenij pri antitonnyh vozmuscheniyah [On stability of ordered covering of multi-valued mappings under antitone disturbances]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences*, 2016, vol. 21, no. 6, pp. 1969-1973. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-1969-1973 (In Russian)